UNIVERSITÀ DI TORINO – FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZA DEI MATERIALI

ESAME DI MATEMATICA I

ESERCIZI

Prof. S. GARBIERO

A.A. 2003 – 2004

1. FUNZIONI ELEMENTARI

1) Data la funzione $f(x) = 3x^2 - x + 2$, trovare:

a) l'immagine e la controimmagine di 2;

b) l'espressione analitica delle funzioni $g(x) = f(x-1)$ e $h(x) = f(\frac{2}{x})$.

2) Scrivere le seguenti funzioni:

a) area di un rettangolo avente un perimetro di $10\,m$, in funzione della base;

b) perimetro di un rettangolo avente l'area di $16\,m^2$, in funzione di un lato;

c) area di un triangolo equilatero in funzione del lato;

d) superficie totale di un cubo in funzione del volume;

e) superficie totale di una scatola di base quadrata, avente il volume di $2\,m^3$, in funzione del lato di base.

3) Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

a) $s = \frac{1}{2}t - 1$; b) $y = \dfrac{4 - x^2}{2 - x}$; c) $y = \begin{cases} x\,, & x \le 0 \\ x + 1\,, & x > 0 \end{cases}$;

d) $y = |2x - 1|$; e) $y = \dfrac{2x - |x|}{x}$; f) $y = \begin{cases} 2x + 3\,, & x < -1 \\ 3 - x\,, & x \ge -1 \end{cases}$;

g) $y = \begin{cases} x + 2\,, & x \le -1 \\ x^2\,, & x > -1 \end{cases}$; h) $y = \begin{cases} -1\,, & x \le -1 \\ 3x + 2\,, & |x| < 1 \\ 7 - 2x\,, & x \ge 1 \end{cases}$.

4) Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

a) $f(x) = x^{-2}$; b) $f(x) = x^{-3}$; c) $f(x) = x^2 + x$;

d) $f(x) = x^3 - x$; e) $f(x) = x^4 - 4x^2$; f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

5) Determinare il periodo delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$; b) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$; c) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$;

d) $f(x) = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$; e) $f(x) = \cos(6x) + \operatorname{sen}(9x)$; f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(6x)}$.

6) Sulla superficie dell'oceano la pressione dell'acqua uguaglia la pressione atmosferica e vale circa $105\,Kg/m^2$. Sotto la superficie, la pressione dell'acqua cresce di circa $99,98\,Kg/m^2$ ogni $10\,m$ di profondità.

a) Esprimere la pressione dell'acqua in funzione della profondità.

b) Stimare quanto vale la pressione dell'acqua a $150\,m$ di profondità.

c) A quale profondità si ha una pressione di una tonnellata per metro quadrato?

7) Calcolare il valore **esatto** delle seguenti espressioni:

$$\log_2 64, \qquad \log_6 \frac{1}{36}, \qquad \log_8 2, \qquad \ln e^{\sqrt{2}}, \qquad e^{3\ln 2},$$
$$\log 1,25 + \log 80, \quad \log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2, \quad 2^{(\log_2 3 - \log_2 5)}.$$

8) Calcolare il valore **approssimato** delle seguenti espressioni:

$$\log_2 5, \qquad \log_5 26,05, \qquad 2\ln 4 - \ln 2, \qquad \log_3 \sqrt[12]{321}.$$

9) Un isotopo del sodio ha un tempo di dimezzamento di 15 ore. Un campione di questo isotopo ha una massa di 2 grammi.

a) Stimare la massa del campione dopo 60 ore.

b) Stimare il tempo necessario affinchè la massa residua del campione sia di $0,01$ grammi.

10) In un processo industriale, la produzione di un certo composto chimico quadruplica ogni 6 ore.

a) Stimare la quantità prodotta in un giorno sapendo che la massa iniziale del composto è di 100 chilogrammi.

b) Quanto tempo occorre per produrre 50 tonnellate del composto?

11) Disegnare i grafici delle seguenti funzioni applicando opportune trasformazioni ai grafici delle funzioni elementari:

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$; b) $y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$; c) $y = 1 + 2x - x^2$;
d) $y = (x-1)^3 + 2$; e) $y = \sqrt{x+4} - 3$; f) $y = \sqrt[3]{x+2}$;
g) $y = (0,6)^x$; h) $y = -2^{-x}$; i) $y = 4^x - 3$;
l) $y = 4^{x-3}$; m) $y = 1 - \log(x+5)$; n) $y = 2 + \cos(x+\pi)$;
o) $y = \operatorname{sen} x \, \cos x$; p) $y = \operatorname{tg}(2x)$; q) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$;
r) $y = |\operatorname{sen} x|$; s) $y = |x^2 - 2x|$; t) $y = e^{|x-3|}$;
u) $y = \sqrt{|x|}$; v) $y = \operatorname{sen}|x|$; z) $y = \ln|x|$.

12) Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$; $\quad$ b) $f(x) = 1 - 3x$, $\quad g(x) = x^2 + 3x - 1$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$; $\quad$ d) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $\quad g(x) = x^2 + 1$;

scrivere l'espressione analitica delle funzioni composte $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$.

13) Esprimere ciascuna delle seguenti funzioni nella forma $f \circ g$, cioè come funzione composta da due funzioni f e g:

a) $y = (x^2+1)^{10}$, $\quad$ b) $y = \cos\sqrt{x}$, $\quad$ c) $y = \sqrt{\cos x}$, $\quad$ d) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

14) a) Date le funzioni $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, trovare una funzione g tale che $h = f \circ g$.

b) Date le funzioni $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, trovare una funzione f tale che $h = f \circ g$.

c) Date le funzioni $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, trovare una funzione g tale che $h = g \circ f$.

15) Disegnare il grafico delle seguenti funzioni; stabilire se sono invertibili e, quando è possibile, determinare l'espressione analitica ed il grafico della funzione inversa:

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x+5)$, $\qquad g(x) = 2^{x-3}$, $\qquad h(x) = |x-1|$, $\qquad q(x) = \sqrt{x-2}$.

16) Quando si scatta una fotografia con un flash le batterie iniziano a ricaricare il condensatore con una carica elettrica data da

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{2}})$$

(t è il tempo espresso in secondi; Q_0 è la massima capacità di carica).

a) Disegnare il grafico della funzione $Q(t)$ e verificare che è invertibile.

b) Trovare la funzione inversa Q^{-1} e specificare il suo significato fisico.

c) Quanto tempo è necessario affinchè il condensatore abbia una carica pari al 90% della sua carica massima?

17) Nella teoria della relatività la massa m di un corpo in movimento è collegato alla sua velocità relativa v dalla relazione

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

(m_0 è la massa riposo e c è la velocità della luce nel vuoto). Trovare l'espressione analitica della funzione inversa e specificare il suo significato fisico.

Risposte

1) a) L'immagine di 2 è 12; le controimmagini di 2 sono 0 e $\dfrac{1}{3}$.

b) $g(x) = 3x^2 - 7x + 9;\quad h(x) = \dfrac{2(x^2 - x + 6)}{x^2}$.

2) a) $y = -x^2 + 5x$; b) $y = 2\left(x + \dfrac{16}{x}\right)$; c) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,x^2$;

d) $y = 6\sqrt[3]{x^2}$; e) $y = 2\left(x^2 + \dfrac{4}{x}\right)$.

4) Le funzioni a) ed e) sono pari; le funzioni b) e d) sono dispari; le funzioni c) ed f) non sono nè pari nè dispari.

5) a) $T = \dfrac{2\pi}{3}$; b) $T = 8\pi$; c) $T = \dfrac{\pi}{2}$; d) $T = 3\pi$; e) $T = \dfrac{2\pi}{3}$; f) $T = \pi$.

6) a) $p(m) = 9,998\,m + 105$ (p: pressione, m: metri); b) circa $1605\,Kg/m^2$;
c) circa 90 metri.

7) 6; -2; $\dfrac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; 8; 2; 2; $\dfrac{3}{5}$.

8) $2,3219284$; $2,0255629$; $2,0794415$; $2,626696$.

9) a) $m = 2^{1-\frac{t}{15}}$ (m: massa in grammi; t: tempo in ore); $m(60) = 0,125$ grammi.

b) Circa 4 giorni e 19 ore.

10) a) $q(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$ (q: quantità prodotta in chilogrammi; t: tempo in ore);
$q(24) = 25,6$ tonnellate.

b) Circa 27 ore.

12) a) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(1 - \sqrt{x})$; $(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{\operatorname{sen} x}$; $(f \circ f)(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$;
$(g \circ g)(x) = 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}$.

b) $(f \circ g)(x) = -3x^2 - 9x - 2$; $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 15x + 5$; $(f \circ f)(x) = 9x - 2$;
$(g \circ g)(x) = (x^2 + 3x + 1)^2 + 3x^2 + 9x + 4$.

c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$; $(g \circ f)(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$; $(f \circ f)(x) = x$; $(g \circ g)(x) = \dfrac{2x+3}{3x+5}$.

d) $(f \circ g)(x) = \sqrt{2x^2 + 5}$; $(g \circ f)(x) = 2x + 4$; $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{4(2x+3)} + 3}$;
$(g \circ g)(x) = x^4 + 2x^2 + 2$.

13) a) $g(x) = x^2 + 1,\ f(x) = x^{10}$; b) $g(x) = \sqrt{x},\ f(x) = \cos x$;

c) $g(x) = \cos x,\ f(x) = \sqrt{x}$; d) $g(x) = \operatorname{tg} x,\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

14) a) $g(x) = x^2 + x - 1$; b) $f(x) = x^2 + 6$; c) $g(x) = 4x - 17$.

15) $f^{-1}(x) = 2x - 5$; $g^{-1}(x) = 3 + \dfrac{1}{\ln 2} \ln x$; $h(x)$ non è invertibile;
$q^{-1}(x) = x^2 + 2, \quad x \in [0, +\infty)$.

16) b) $t = 2 \ln \left(\dfrac{Q_0}{Q_0 - Q} \right)$; è il tempo che il condensatore impiega per avere carica Q.

c) $t = 2 \ln 10$ (circa 5 secondi). Notare che il risultato non dipende dalla capacità Q_0 del condensatore.

17) $v = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{m_0}{m} \right)^2}$; è la velocità di un corpo di massa m in movimento.

2. DISEQUAZIONI

1) Risolvere le seguenti disequazioni:

$(x+5)(x+3) > x^2 + 10x + 9\,;$ R. $x \in (-\infty, 3)$

$15 + 7x - 2x^2 \leq 0\,;$ R. $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [5, +\infty)$

$\frac{2}{x-1} \leq \frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x}\,;$ R. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$|x - 3| < 5\,;$ R. $x \in (-2, 8)$

$|x + 4| \geq 2\,;$ R. $x \in (-\infty, -6] \cup [-2, +\infty)$

$|3 - x^2| > 1\,;$ R. $x \in (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

$|x^2 - 3x + 1| < 1\,;$ R. $x \in (0, 1) \cup (2, 3)$

$\sqrt{9 - 4x^2} > -1\,;$ R. $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

$\sqrt{2 - x} \leq 4\,;$ R. $x \in [-14, 2]$

$\sqrt{2x^2 - 3x + 7} > 3\,;$ R. $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16 \geq 0\,;$ R. $x \in (-\infty, -2]$

$2 - 9 \cdot 2^{-x} + 4 \cdot 4{-}x < 0\,;$ R. $x \in (-1, 2)$

$\log\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \geq 1\,;$ R. $x \in [-\frac{7}{3}, -2)$

$\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} > 6\,;$ R. $x \in (0, \frac{1}{8}) \cup (4, +\infty)$

$|\log^2_{\frac{1}{2}} x + 3\log_{\frac{1}{2}} x - 1| < 3\,;$ R. $x \in (\frac{1}{2}, 2) \cup (4, 16)$

$\operatorname{sen} 2x - \cos x > 0\,;$ R. $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi)$

$\cos 2x + \cos x < 0\,;$ R. $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \cup (\pi, \frac{5}{3}\pi)$

$2\cos^2 x + \cos x < 0\,;$ R. $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi] \cup [\frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

$2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos x - 4 > 0\,;$ R. $x \in [0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{5}{3}\pi, 2\pi]$

$2\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x - 1 \geq 0\,;\qquad$ R. $x \in [\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi] \cup \{\frac{\pi}{2}\}$

$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x \geq \frac{4}{\sqrt{3}}\,;\qquad$ R. $x \in (0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{3}\pi, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$\frac{4\cos x + 2\cos 2x - 1}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}} \geq 0\,;\qquad$ R. $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \cup (\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi)$

2) Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$y = \sqrt{3^{2-2x} - 28 \cdot 3^{-x} + 3}\,;\qquad$ R. $D = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

$y = \left[\ln\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\,;\qquad$ R. $D = (-1, \frac{1}{2}] \cup (3, +\infty)$

$y = \sqrt{\frac{\ln^2 x - 4}{\ln x + 1}}\,;\qquad$ R. $D = [e^{-2}, e^{-1}) \cup [e^2, +\infty)$

$y = \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{|x + 1|}\right)\,;\qquad$ R. $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

$y = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{tg}\, x}{2\cos x - \sqrt{3}}}\,;\qquad$ R. $D = [0, \frac{\pi}{6}) \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{11}{6}\pi, 2\pi]$

$y = \ln\left(\frac{2\cos x + 1}{2\cos^2 x - 1}\right)\,;\qquad$ R. $D = [0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi) \cup (\frac{5}{4}\pi, \frac{4}{3}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$

3) Determinare il dominio ed il segno delle seguenti funzioni:

$y = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\, x}{\sqrt{3} - \mathrm{cotg}\, x}\,;\qquad$ R. $D = (0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$y > 0$ se $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{2}{3}\pi, \pi)$; $\quad y < 0$ se $x \in (0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi)$

$y = \frac{2 - x}{\sqrt{\ln|x - 2|}}\,;\qquad$ R. $D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$y > 0$ se $x \in (-\infty, 1)$; $\quad y < 0$ se $x \in (3, +\infty)$

$y = \frac{\sqrt{\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}^2 x}}{\cos x}\,;\qquad$ R. $D = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$y > 0$ se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\quad y < 0$ se $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

3. LIMITI

1) Calcolare i seguenti limiti (senza usare la regola di L'Hôpital):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{1}{3}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{\sqrt{4x^2-x}}=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2-2x}}=-\infty\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{\sqrt{4x^3-x^2}}=0\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-5x+6}+x\right]=\frac{5}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}=3\,;$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{cotg} x+\cos x}{2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3}=-\frac{1}{4}\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ \log_3\frac{3-x^3}{\sqrt{3x^6-2x^3+1}}=-\frac{1}{2}\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ \log\frac{x^3-1}{2x^2+x-1}=+\infty\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ 2^{\frac{1-x^2}{x+2}}=0\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\dfrac{2}{x}}=e^{-\frac{2}{3}}\ ;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x^3-8}=0\,;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3-x}{\sqrt{4x^2-x}}=+\infty\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{\sqrt{4x^2-x}}=\frac{1}{2}\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2-2x}}=-\infty\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\,[\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}]=-2\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{2x\sin 2x}=\frac{3}{8}\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} x}{\cos 2x-1}=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\mathrm{sen\,x}}}=\sqrt{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ \log\frac{x^2-5x+2}{x^4+1}=-\infty\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ \log\frac{2x^3-x+2}{2x^3+x}=0\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^2-3}}}=+\infty\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ x^3[\ln(8x^3-1)-3\ln 2x]=-\frac{1}{8}\,.$$

2) Studiare le seguenti funzioni, determinando: a) il dominio; b) il segno; c) i limiti agli estremi del dominio d) gli asintoti. Alcuni risultati si trovano tra gli esercizi sulle disequazioni. Vengono dati solo gli asintoti.

$$y=\frac{x^2+2x+4}{2x}\qquad(x=0,\ y=\frac{x}{2}+1)$$

$$y=\frac{x^2-1}{x^2-4}\qquad(x=\pm 2,\ y=1)$$

$$y=\frac{x^2-4}{x+1}\qquad(x=-1,\ y=x-1)$$

$$y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} \quad (x = \pm 1,\ y = x)$$

$$y = x\sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^2 - 4}} \quad (x = 2 \text{ a destra},\ \ x = -2 \text{ a sinistra},\ \ y = x)$$

$$y = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{cotg} x}\,, \quad x \in [0, \pi] \qquad (x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{2}{3}\pi)$$

$$y = \ln \frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\,, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$(x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{4}{3}\pi \text{ a sinistra; } \ x = \frac{2}{3}\pi \text{ e } x = \frac{3}{2}\pi \text{ a destra})$$

$$y = \ln\left(\frac{x - 1}{x + 3}\right) \qquad (x = 1 \text{ a destra},\ \ x = -3 \text{ a sinistra},\ \ y = 0)$$

4. STUDI DI FUNZIONE

Studiare le seguenti funzioni, determinando:

a) il dominio; il segno; il comportamento agli estremi del dominio;

b) gli eventuali asintoti e le intersezioni con gli assi coordinati;

c) gli intervalli in cui la funzione è monotona e gli eventuali massimi e minimi;

d) gli intervalli in cui è concava o convessa e gli eventuali flessi (solo per le funzioni contrassegnate con $(*)$).

e) Disegnare il grafico qualitativo della funzione (i grafici rispecchiano l'andamento delle funzioni e non sempre rispettano le esatte proporzioni tra i diversi valori).

Lo studio delle funzioni 3) e 11) è facoltativo poichè richiede la risoluzione di disequazioni irrazionali.

1) $(*)$ $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$;

3) $y = 5x + 4\sqrt{x^2 - 1}$; 4) $y = x\sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4}}$;

5) $y = \dfrac{e^{2x+1}}{x^2 - 4}$; 6) $(*)$ $y = x\, e^{\frac{1}{\ln x}}$;

7) $y = e^{-(x+1)}\sqrt{x^2 - 6}$; 8) $(*)$ $y = \dfrac{x + 1}{\ln(x + 1)}$;

9) $y = \ln\left(\dfrac{x - 7}{x - 1}\right) - x$; 10) $(*)$ $y = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

11) $y = \ln\left(\dfrac{x - \sqrt{x + 2}}{x - 2}\right)$; 12) $y = \left[\ln\left(\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$;

13) $y = \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x + 1}{\operatorname{sen} x}$; $x \in [0, 2\pi]$; 14) $y = \ln\left(\dfrac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right)$; $x \in [0, 2\pi]$;

15) $y = \dfrac{\sqrt{1 - 2\cos x}}{\cos x}$, $x \in [0, 2\pi]$; 16) $y = \dfrac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{cotg} x}$, $x \in [0, \pi]$.

5. INTEGRALI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1) Risolvere i seguenti integrali:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \ln\sqrt{1+x^2} + C; \qquad \int \frac{x}{(4x^2+1)^5}\,dx = -\frac{1}{32(4x^2+1)^4} + C;$$

$$\int \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right) + C; \qquad \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C;$$

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3} + C; \qquad \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\cos\sqrt{x} + C;$$

$$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\operatorname{sen} 3 - 2\operatorname{sen} 1; \qquad \int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\,dx = \sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C;$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(3\ln x)}{x}\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + C; \qquad \int_0^\pi \left[2+\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\right]^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \frac{38}{3};$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\arccos(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{5}{48}\pi^3; \qquad \int \ln(3x^2+1)\,dx = x\ln(3x^2+1) - 2x + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x) + C;$$

$$\int (x-1)\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})\,dx = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\cos x}{2} + C\,;$$

$$\int x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{x}{\cos x} - \ln|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}||1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}|^{-1} + C\,;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x\sin x\,dx = \left[\frac{1}{\cos x} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\,; \qquad \int x^3\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}C;$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = -\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + C; \qquad \int \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right) + C;$$

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx = \ln\frac{|x-3|^7}{(x-2)^6} + C; \qquad \int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \ln|\frac{x}{x-1}| - \frac{1}{x-1} + C;$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x(1+x^2)}\,dx = \ln\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 3\operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{x^3+3x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 3\operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{6x}{x^3-8}\,dx = \ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+2x+4}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C;$$

$$\int \frac{x}{x^2-x+2}\,dx = \ln\sqrt{|x^2-x+2|} + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + C\,;$$

$$\int \frac{1+\sin x}{2-\cos x}\,dx = \ln\frac{1+3\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$$

$$\int \frac{2-\cos x}{2+\cos x}\,dx = \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - x + C.$$

2) Calcolare l'area della parte **finita** di piano compresa tra le curve:

$$y_1 = -x^2 + 5x - 1\,, \qquad y_2 = \frac{2x+1}{x-1}\,. \qquad \text{(R. } \frac{16}{3} - 3\ln 3\text{)}$$

3) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra le curve:

$$y_1 = x^2 \ln x\,, \qquad y_2 = (6x-9)\ln x\,. \qquad \text{(R. } \frac{80}{9} - 9\ln 3\text{)}$$

4) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra la retta $r)$ $x + 2y + 1 = 0$ e la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}(-x^2 + x + 2)$. (R. $\frac{16}{3}$)

5) Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$, R. $y = \operatorname{sen}(x^2 + C)$;

$(x^2 - 8)y' - 6xy = 0$, R. $y = C(x^2 - 8)^3$;

$$y' - \frac{2y}{x^3 + x} + \frac{\ln x^2}{x} = 0, \qquad \text{R.} \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{\ln|x|}{x^2} + \frac{1}{2x^2} - \ln^2|x| + C\right);$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}\,y' - y + \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}} = 0 \\ y(0) = -\dfrac{1}{9} \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = \frac{1}{3}\left[2(\sqrt{x} + \frac{1}{3})e^{-\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}}\right];$$

$$\begin{cases} y' + y\operatorname{cotg} x = 5e^{\cos x} \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\operatorname{sen} x};$$

$$\begin{cases} y' + 2y\cos x - \operatorname{sen} 2x = 0 \\ y(\pi) = 1 \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = \frac{1}{2}\left(3e^{-2\operatorname{sen} x} + 2\operatorname{sen} x - 1\right);$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 3\operatorname{sen} x - \cos x \\ y(0) = -1 \quad y'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x - \cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x;$$

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 2e^{1-4x} \\ y(0) = \dfrac{e}{3}, \quad y'(0) = \dfrac{2e}{3} \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = -\frac{2}{5}\left(e^{1-3x} + e^{2x+1}\right) + \frac{1}{3}e^{1-4x};$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = -2\sin 3x + 3\cos 3x \\ y(0) = \dfrac{7}{12} \quad y'(0) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad \begin{array}{c} y = (\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}x)e^x \\ -\dfrac{1}{12}(\operatorname{sen} 3x + 5\cos 3x) \end{array};$$

$$(x^2 - x^3)y' - y^2 = 0, \qquad \text{R.} \quad y = \frac{x}{1 + Cx - x \ln |\frac{x}{1-x}|};$$

$$xy' - 2y = x \operatorname{arctg} x, \qquad \text{R.} \quad y = -x \operatorname{arctg} x + x^2 \ln |x| - \frac{x^2}{2} \ln(1 + x^2) + Cx^2;$$

$$y' - 2(\operatorname{tg} x)y + e^{2x} = 0, \qquad \text{R.} \quad y = -\cos^2 x \left\{ \frac{e^{2x}}{8} [\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) + 4] + C \right\};$$

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2x), \qquad \text{R.} \quad y = e^{-x}[C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)] + \frac{1}{17}[\cos(2x) + 4 \operatorname{sen}(2x)];$$

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, y + e^{\sqrt{x}} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = 2(1 + \sqrt{x})e^{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}};$$

$$\begin{cases} x^2 y' + 3xy = \operatorname{sen}(2x) \\ y(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}, \qquad \text{R.} \quad y = \frac{1}{4x^3}[-2x \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x) - \pi].$$

6. INTEGRALI IMPROPRI

Calcolare il valore dei seguenti integrali impropri (oppure verificare che sono divergenti):

$$1) \int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx = \ln 4;$$

$$2) \int_0^1 \ln x \, dx = -1;$$

$$3) \int_0^1 \frac{x}{(x-1)^3}\, dx, \quad \text{(divergente)};$$

$$4) \int_0^1 x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}, \quad \text{(integrare per parti)};$$

$$5) \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx = \sqrt{5};$$

$$6) \int_0^9 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\, dx = \frac{3}{2};$$

$$7) \int_1^3 \frac{1}{x^2-5x+4}\, dx, \quad \text{(divergente)};$$

$$8) \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}\, dx = \frac{1}{2}$$

$$9) \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4};$$

$$10) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x}\, dx = \frac{1}{2 \ln^2 2};$$

$$11) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = 2\pi, \quad \text{(integrare per parti)};$$

$$12) \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x-1)^3}\, dx = \frac{1}{2}, \quad \text{(vedi integrale n. 3)}$$

$$13) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2, \quad \left(\text{porre } t = \frac{1}{x}\right);$$

$$14) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\, \pi.$$